Colecţia EVALUAREA NAŢIONALĂ DE NOTA 10

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programa şcolară în vigoare.

Editor: Călin Vlasie
Corectură: Cristi Dinu
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Design copertă: Ionuţ Broştianu

Cartea Românească EDUCAȚIONAL

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ANTOHE, FLORIN
Evaluarea Naţională la finalul clasei a VIII-a : matematică /
Florin Antohe, Bogdan Antohe, Marius Antonescu. - Piteşti :
Cartea Românească Educaţional, 2018
ISBN 978-606-8982-19-9

I. Antohe, Bogdan
II. Antonescu, Marius

37

Grupul Editorial ROCART

www.cartearomaneasca.ro

Florin Antohe
Bogdan Antohe
Marius Antonescu

MATEMATICĂ

Evaluarea Națională la finalul clasei a VIII-a

(60 de teste pentru nota 10)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Programa pentru Evaluarea Naţională la matematică clasa a VIII-a

I. Statutul disciplinei

În cadrul Evaluării Naţionale de la finalul clasei a VIII-a, matematica are statut de disciplină obligatorie.
Testul de matematică este o probă scrisă cu durata de 2 ore.

II. Competenţe de evaluat

1. Utilizarea noţiunii de număr real şi a relaţiilor dintre mulţimile de numere studiate.
2. Identificarea proprietăţilor operaţiilor cu numere reale.
3. Aplicarea operaţiilor cu numere reale în calcule variate.
4. Analizarea unor situaţii practice cu ajutorul rapoartelor, procentelor, proporţiilor.
5. Identificarea unor probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor, inecuaţiilor sau al sistemelor de ecuaţii, rezolvarea acestora şi interpretarea rezultatului obţinut.
6. Aplicarea în rezolvarea problemelor a elementelor de logică şi teoria mulţimilor.
7. Utilizarea elementelor de calcul algebric.
8. Alegerea metodei adecvate de rezolvare a problemelor în care intervin dependenţe funcţionale sau calculul probabilităţilor.
9. Aplicarea teoriei specifice funcţiei de forma $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde A este o mulţime finită sau $A = \mathbb{R}$.
10. Utilizarea proprietăţilor figurilor geometrice şi a corpurilor geometrice în probleme de demonstraţie şi de calcul.
11. Reprezentarea, prin desen, a unor figuri geometrice şi a unor corpuri geometrice utilizând instrumente geometrice.
12. Transpunerea în limbaj matematic a enunţului unei probleme.
13. Investigarea valorii de adevăr a unor enunţuri şi construirea unor generalizări.
14. Redactarea coerentă şi completă a soluţiei unei probleme.

III. Conţinuturi

Aritmetică şi algebră

1. Mulţimi

- Mulţimi: relaţii (apartenenţă, egalitate, incluziune); submulţime; operaţii cu mulţimi (reuniune, intersecţie, diferenţă, produs cartezian). Mulţimi finite, infinite.
- Mulţimile: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Scrierea numerelor naturale în baza 10.
- Propoziţii adevărate şi propoziţii false.
- Împărţirea cu rest a numerelor naturale. Divizibilitatea în $\mathbb{N}$: definiţie, divizor, multiplu; proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate; criteriile de divizibilitate cu 10,

2, 5, 3; numere prime şi numere compuse; numere pare şi numere impare; numere prime între ele; descompunerea unui număr natural în produs de puteri de numere prime; cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun.

- Divizibilitatea în $\mathbb{Z}$: definiţie, divizor, multiplu.
- Fracţii subunitare, echiunitare, supraunitare; reprezentări echivalente ale fracţiilor; fracţii ireductibile.
- Scrierea unui număr raţional sub formă de fracţie ordinară sau fracţie zecimală.
- Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea şi ordonarea numerelor reale.
- Valoarea absolută (modulul), partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr real. Opusul şi inversul unui număr real. Rotunjirea şi aproximarea unui număr real.
- Intervale în $\mathbb{R}$: definiţie, reprezentare pe axă.
- Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect; algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural; scrierea unui număr real pozitiv ca radical din pătratul său.
- Reguli de calcul cu radicali. Introducerea factorilor sub radical. Scoaterea factorilor de sub radical. Raţionalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$, $a+\sqrt{b}$, $a-\sqrt{b}$ cu $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{N}$. Operaţii cu numere reale: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere cu exponent număr întreg. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor. Factor comun.
- Media aritmetică şi media aritmetică ponderată a unor numere raţionale pozitive. Media geometrică a două numere reale pozitive.
- Rapoarte şi proporţii: raport; proprietatea fundamentală a proporţiilor; proporţii derivate; aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporţie; mărimi direct proporţionale şi mărimi invers proporţionale; regula de trei simplă.
- Procente: $p\%$ dintr-un număr real; aflarea unui număr raţional când cunoaştem $p\%$ din el; aflarea raportului procentual. Rezolvarea problemelor în care intervin procente.
- Calculul probabilităţii de realizare a unui eveniment.

2. Calcul algebric

- Calcul cu numere reprezentate prin litere: adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicarea la putere cu exponent număr întreg.
- Formule de calcul prescurtat.
- Descompunerea în factori: metoda factorului comun; utilizarea formulelor de calcul prescurtat; gruparea termenilor şi metode combinate.
- Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Simplificare. Operaţii cu rapoarte (adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la putere cu exponent număr întreg).

3. Funcţii

- Noţiunea de funcţie.
- Funcţii definite pe mulţimi finite exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule; graficul unei funcţii, reprezentarea geometrică a graficului.
- Funcţii de tipul $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, unde $A = \mathbb{R}$ sau o mulţime finită; reprezentarea geometrică a graficului funcţiei f; interpretarea geometrică.

4. Ecuaţii, inecuaţii şi sisteme de ecuaţii

- Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a ecuaţiilor de forma $ax + b = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$. Ecuaţii echivalente.
- Rezolvarea în $\mathbb{R}^2$ a sistemelor de ecuaţii de forma: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.
- Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a ecuaţiilor de forma $ax^2 + bx + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$; $b, c \in \mathbb{R}$.
- Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a inecuaţiilor de forma: $ax + b \leq 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.
- Probleme cu caracter aplicativ care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor, inecuaţiilor şi al sistemelor de ecuaţii.
- Utilizarea metodelor aritmetică sau algebrică pentru rezolvarea unor probleme.

Geometrie

- Măsurare şi măsuri (lungime, unghi, arie, volum): transformări (inclusiv 1dm^3 = = 1 litru).
- Figuri şi corpuri geometrice:

1. Punctul, dreapta, planul, semiplanul, semidreapta, segmentul de dreaptă, unghiul

- Poziţii relative, clasificare: convenţii de desen şi notaţii.
- Paralelism şi perpendicularitate în plan şi în spaţiu; axioma paralelelor; unghiuri Cu laturile respectiv paralele; unghiul a două drepte în spaţiu; drepte perpendiculare; dreaptă perpendiculară pe plan; distanţa de la un punct la un plan; plane paralele; distanţa dintre două plane paralele.
- Teorema celor trei perpendiculare; distanţa de la un punct la o dreaptă.
- Proiecţia ortogonală a unui punct, segment sau a unei drepte pe un plan.
- Unghiul unei drepte cu un plan; lungimea proiecţiei unui segment.
- Unghiul diedru; unghiul plan corespunzător unui unghi diedru; măsura unghiului a două plane; plane perpendiculare.
- Simetria faţă de un punct în plan; simetria faţă de o dreaptă în plan.
- Calculul unor distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor studiate.

2. Triunghiul

- Perimetrul şi aria.
- Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi.
- Unghi exterior unui triunghi.
- Linii importante în triunghi şi concurenţa lor.
- Linia mijlocie în triunghi.
- Triunghi isoscel şi triunghi echilateral – proprietăţi.
- Criterii de congruenţă a triunghiurilor.
- Triunghiul dreptunghic – teorema înălţimii; teorema catetei; teorema lui Pitagora şi reciproca ei.
- Sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta; rezolvarea triunghiului dreptunghic.
- Teorema lui Thales şi reciproca ei.
- Teorema fundamentală a asemănării.
- Triunghiuri asemenea – criterii de asemănare a triunghiurilor.

3. Patrulaterul convex

- Perimetrul şi aria (paralelogramul, dreptunghiul, rombul, pătratul, trapezul).
- Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex.
- Paralelograme particulare (dreptunghi, romb, pătrat) – proprietăţi.
- Trapezul; linia mijlocie în trapez.
- Trapeze particulare (isoscel şi dreptunghic) – proprietăţi.

4. Cercul

- Centru, rază, diametru, disc.
- Unghi la centru.
- Coarde şi arce în cerc.
- Unghi înscris în cerc; măsura unghiului înscris în cerc.
- Lungimea cercului; aria discului.
- Calculul elementelor (latură, apotemă, perimetru, arie) în poligoane regulate.

5. Corpuri geometrice

- Paralelipipedul dreptunghic, cubul; prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat sau dreptunghi; piramida triunghiulară regulată, tetraedru regulat, piramida patrulateră regulată, piramida hexagonală regulată; trunchiul de piramidă triunghiulară regulată; trunchiul de piramidă patrulateră regulată; cilindrul circular drept; conul circular drept; trunchiul de con circular drept; sfera.
- Reprezentarea lor prin desen; convenţii de desen şi notaţii.
- Descrierea elementelor lor.
- Desfăşurări.
- Aria laterală, aria totală, volumul.

ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ

1. MULȚIMI

1.1. Relații (apartenență, egalitate, incluziune). Submulțime

Mulțimea reprezintă o colecție (grup, ansamblu) formată din obiecte distincte, care reprezintă elementele mulțimii.

Mulțimile se notează cu litere mari: A, B, C, ..., P, R, ...

Mulțimile se reprezintă într-unul din următoarele 3 moduri:

- Prin enumerarea elementelor: $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$;
- Prin enunțarea unei proprietăți caracteristice: $A = \{x \mid x$ este cifră pară$\}$;
- Prin diagrame Venn-Euler (Figura 1).

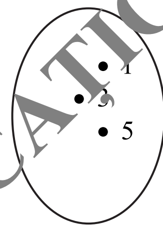


Figura 1

Numărul de elemente ale unei mulțimi se numește cardinalul respectivei mulțimi.

Exemplu: $A = \{1, 7, 11, 24, 35\}$ card$(A) = 5$

Mulțimea care nu are niciun element se numește mulțime vidă.

Relații:

1.1.1. Între un element și o mulțime: relația de apartenență.

Dacă un obiect face parte dintr-o mulțime, atunci spunem că aparține acelei mulțimi.

Exemplu: $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Vom spune că 1 aparține mulțimii A, 10 nu aparține mulțimii A. Notații: $1 \in A$; $10 \notin A$.

1.1.2. Între două mulțimi: relația de incluziune.

O mulțime A este inclusă într-o mulțime B, dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B.

Notăm: $A \subset B$

Dacă mulțimea A este inclusă în mulțimea B, atunci A se numește submulțime (parte) a mulțimii B.

O altă relație între mulțimi este egalitatea (=). Două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente.

1.2. Operații cu mulțimi (reuniune, intersecție, diferență, produs cartezian)

1.2.1. Reuniunea a două mulțimi A și B este mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre ele.

Important: Elementele comune se iau o singură dată.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

1.2.2. Intersecția a două mulțimi A și B este mulțimea elementelor comune celor două mulțimi.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Dacă intersecţia a două mulţimi este mulţimea vidă, atunci mulţimile se numesc disjuncte.

Considerăm două mulţimi A şi B.

1.2.3. Diferenţa mulţimilor A şi B este o nouă mulţime care conţine elementele care se găsesc în A şi nu se găsesc în B:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}.$$

În mod evident, diferenţa dintre mulţimea B şi mulţimea A va conţine elementele care se găsesc în B şi nu se găsesc în A.

1.2.4. Diferenţa simetrică a mulţimilor *A* şi *B* se defineşte astfel:

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

1.2.5. Produsul cartezian este mulţimea formată din toate perechile ordonate de elemente, astfel încât primul element al perechii să aparţină primei mulţimi, iar al doilea element al perechii să aparţină celei de-a doua mulţimi:

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ şi } y \in B\}.$$

Observaţie: Numărul elementelor produsului cartezian $A \times B$ este egal cu produsul dintre numărul elementelor mulţimii A şi numărul elementelor mulţimii B.

Exemple: $A = \{ 1; 2; 3\}$; $B = \{ 3; 4\}$

$A \cup B = \{ 1; 2; 3; 4\}$; $A \setminus B = \{ 1; 2\}$; $A \cap B = \{3\}$; $B \setminus A = \{4\}$

$A \times B = \{(1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4); (3; 3); (3; 4)\}$.

1.3. Mulţimi finite. Mulţimi infinite

O mulţime care are n elemente, unde n este un număr natural, este o mulţime finită.

Exemplu: mulţimea elevilor dintr-o şcoală, mulţimea divizorilor unui număr.

O mulţime care nu este finită se numeste mulţime infinită (are un număr infinit de elemente).

Exemplu: mulţimea multiplilor unui număr, mulţimea numerelor naturale, întregi etc.

1.4. Mulţimile:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- Mulţimea numerelor naturale se notează cu $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

- Mulţimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$.

Observăm că mulţimea numerelor întregi se obţine reunind mulţimea numerelor naturale cu întregii negativi obţinuţi prin simetrizarea numerelor naturale faţă de originea axei:

$\mathbb{Z}_- = \{..., n, ..., -3, -2, -1\}$; $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$; $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

- Mulţimea numerelor raţionale:

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$; $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ reprezintă mulţimea numerelor iraţionale.

Reunind mulţimea numerelor raţionale cu cea a numerelor iraţionale, obţinem mulţimea numerelor reale, care se notează cu $\mathbb{R}$.

Exemple: Numere naturale: 1; 2; 3; 4; 5; 6;
Numere întregi: –2; –7; –9; 12; 13;
Numere raţionale: –7; 12; $\frac{3}{7}; -\frac{19}{8}$;
Numere iraţionale: $\sqrt{3};\ 2\sqrt{7};\ -\sqrt{231};\ 1-\sqrt{3};\ 3+\sqrt{2};\ \pi$.
Foarte importantă este relaţia de incluziune dintre toate aceste mulţimi de numere:
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Aplicaţii:

1. Daţi exemplu de 3 numere care sunt întregi, dar nu sunt naturale.
Răspuns: –3; –5; –7 sau orice alt întreg negativ.

2. Daţi exemplu de 3 numere care sunt raţionale, dar nu sunt întregi.
Răspuns: $\frac{3}{7}; \frac{15}{2}; \frac{8}{3}$.

3. Daţi exemplu de 3 numere reale care nu sunt raţionale.
Răspuns: $\sqrt{13}; -2\sqrt{19}; \sqrt{32}$.

4. Fie mulţimea $A = \left\{\frac{8}{-4}; \sqrt{0,(4)}; \frac{-15}{-3}; -\sqrt{12}; \sqrt{0,(2)}; +\sqrt{4}; 3; \sqrt{5\frac{4}{9}}\right\}$.

Determinaţi: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$; $A - \mathbb{Z}$

$$A = \left\{-2; \frac{2}{3}; 5; -2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}; 2; 3; \frac{7}{3}\right\}$$

$A \cap \mathbb{N} = \{2; 3; 5\}$; $A \cap \mathbb{Z} = \{-2; 2; 3; 5\}$; $A \cap \mathbb{Q} = \left\{-2; 2; 3; 5; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right\}$.

$A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \left\{-2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$; $A - \mathbb{Z} = \left\{\frac{2}{3}; -2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{7}{3}\right\}$.

1.5. Scrierea numerelor naturale în baza 10

Sistemul de numeraţie folosit cu precădere în practică este sistemul zecimal, adică sistemul cu baza 10. Baza unui sistem de numeraţie este numărul care arată câte unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior. Sistemul zecimal este poziţional. Acesta utilizează pentru scrierea numerelor zece cifre: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

$\overline{ab} = a \cdot 10 + b$, unde a şi b sunt cifre, $a \neq 0$.

$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$, unde a, b, c sunt cifre, $a \neq 0$.

$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Exemplu: $15724 = 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4$.

Aplicaţie: Găsiţi toate numerele naturale de două cifre de forma $\overline{ab}$, care verifică egalitatea: $2\overline{ab}+\overline{ba}=15(a+b)$.

Soluţie: $2\overline{ab}+\overline{ba}=15(a+b)\Rightarrow 2(10a+b)+10b+a=15a+15b$

$\Rightarrow 20a+2b+10b+a=15a+15b\Rightarrow 21a+12b=15a+15b\Rightarrow 6a=3b$

$\Rightarrow 2a=b\Rightarrow \overline{ab}\in\{12;24;36;48\}$.

1.6. Propoziţii adevărate şi propoziţii false

Propoziţia este un enunţ care poate fi adevărat sau fals. Un enunţ este o succesiune de semne căreia i se poate atribui un sens.

Exemple de propoziţii matematice:

1. 7 + 5 = 12;
2. Suma a două numere naturale consecutive este un număr impar;
3. 14 – 5 = 9.

Exemple de enunţuri care nu sunt propoziţii matematice:

1. Ce mai faci?
2. El are ochii verzi.

Oricărei propoziţii i se asociază o valoare de adevăr. Dacă este adevărată, spunem că are valoarea de adevăr A sau 1, iar dacă este falsă, spunem că are valoarea de adevăr F sau 0.

Propoziţie adevărată şi propoziţie falsă:
1 + 2 + 3 + ... 20 = 210   18 – 15 < 2.

1.7. Împărţirea cu rest a numerelor naturale

Teorema împărţirii cu rest: Oricare ar fi două numere naturale a şi b, $b \neq 0$, există numerele naturale q şi r, unic determinate, astfel încât: $a = b \cdot q + r$, $r < b$, unde:
a – deîmpărţit, q – cât, b – împărţitor şi r – rest.

Dacă restul împărţirii lui a la b este 0, spunem că împărţirea dintre a şi b este exactă.

Aplicaţie: Suma a două numere este 66. Dacă se împarte unul la celălalt, obţinem câtul 3 şi restul 2. Aflaţi cele două numere.

Soluţie: Fie a şi b cele două numere căutate.
Prima relaţie conduce la $a + b = 66$, iar a doua, la $a : b = 3$ rest 2, iar prin aplicarea teoremei împărţirii cu rest devine $a = 3b + 2$. Înlocuind în prima relaţie, avem: $3b + 2 + b = 66$, $4b = 64$, $b = 16$; $a = 50$.

1.8. Divizibilitatea în ℕ: divizor, multiplu, proprietăţi

Un număr natural b este divizor al unui număr natural a dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. În acest caz, a este multiplu al lui b.

Notaţii: $b \mid a$ şi citim b divide pe a sau b este divizor al lui a.
$a \,\vdots\, b$ şi citim a este divizibil cu b sau a este multiplu al lui b.

Dacă a este un număr natural, atunci mulţimea divizorilor lui a se notează D_a, iar mulţimea multiplilor lui a se notează M_a.

Exemple:

a) Mulţimea divizorilor lui 12: $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

b) Mulţimea multiplilor lui 12: $M_{12} = \{0; 12; 24; 36; ...; 12m; ...\}$.

Reţineţi!

Numărul 0 este multiplu pentru orice număr natural.

Pentru numărul 12, divizorii 1 şi 12 se numesc divizori improprii, iar 2, 3, 4 şi 6 se numesc divizori proprii.

Proprietăţile relaţiei de divizibilitate:

1. Orice număr natural se divide cu el însuşi: $a \vdots a$.
2. Orice număr natural este divizibil cu 1: $a \vdots 1$. Din această proprietate putem deduce că 1 este divizor pentru orice număr natural.
3. 0 este divizibil cu orice număr natural: $0 \vdots a$.
4. Dacă numărul a este divizibil cu b şi numărul b este divizibil cu a, atunci cele două numere sunt egale: $a \vdots b$ şi $b \vdots a \Rightarrow a = b$.
5. Fie a, b, c trei numere naturale. Dacă b este divizibil cu a şi c este divizibil cu b, atunci c este divizibil cu a: $b \vdots a$ şi $c \vdots b \Rightarrow c \vdots a$.
6. Dacă două numere a şi b sunt divizibile cu un al treilea număr n, atunci şi suma (diferenţa) celor două numere a şi b este divizibilă cu n: $a \vdots n$ şi $a \vdots n$ şi $b \vdots n \Rightarrow$ $\Rightarrow (a+b) \vdots n$ şi $(a-b) \vdots n$.

Exemplu: $54 \vdots 6$ şi $18 \vdots 6$, atunci este evident că $72 \vdots 6$ şi $36 \vdots 6$

7. Dacă un număr a este divizibil cu p, atunci orice multiplu al lui a se divide cu p.
8. Dacă un număr natural este divizibil cu două numere prime între ele, atunci acel număr este divizibil cu produsul lor.

Aplicaţii:

1. Determinaţi elementele mulţimilor:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{21}{2x+3} \in \mathbb{Z}\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{3x+9}{2x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Soluţie:

a) $2x + 3 \in D_{21} \Rightarrow 2x + 3 \in \{\pm1; \pm3; \pm7; \pm21\} \Rightarrow 2x \in \{-2; -4; 0; -6; 4; -10; 18; -24\} \Rightarrow x \in \{-1; -2; 0; -3; 2; -5; 9; -12\} \Rightarrow A = \{-12; -5; -3; -2; -1; 0; 2; 9\}$.

b) $\left.\begin{array}{l} 2x-3 \mid 3x+9 \Rightarrow 2x-3 \mid -2(3x+9) \Rightarrow 2x-3 \mid -6x-18 \\ 2x-3 \mid 2x-3 \Rightarrow 2x-3 \mid 3(2x-3) \Rightarrow 2x-3 \mid 6x-9 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-3 \mid -27$

$\Rightarrow 2x - 3 \in \{\pm1; \pm3; \pm9; \pm21\} \Rightarrow 2x \in \{4; 2; 6; 0; 12; -6; 30; -24\} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \{-12; -3; 0; 1; 2; 3; 6; 15\}$.

2. Aflaţi toate perechile de numere naturale $(x; y)$ care verifică relaţia:

$$xy + 4x + 4y + 16 = 15.$$

Soluţie: $x(y + 4) + 4(y + 4) = 15 \Rightarrow (x + 4)(y + 4) = 15$

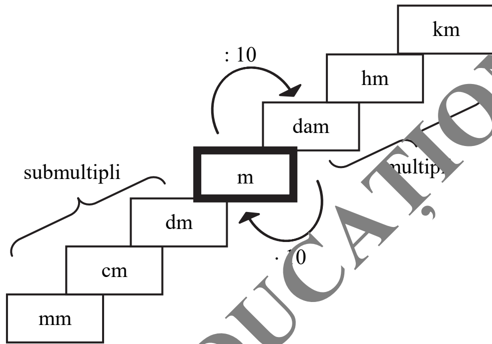
1. $x + 4 = 3 \Rightarrow x = -1$ şi $y + 4 = 5 \Rightarrow y = 1$.

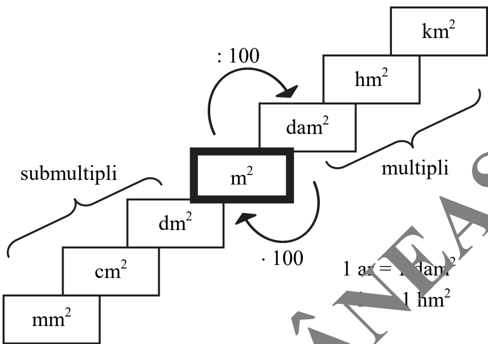
2. $x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1$ şi $y + 4 = 3 \Rightarrow y = -1$.

GEOMETRIE

1.1. Măsurare şi măsuri

Unitatea de măsură standard pentru lungime este metrul (m).

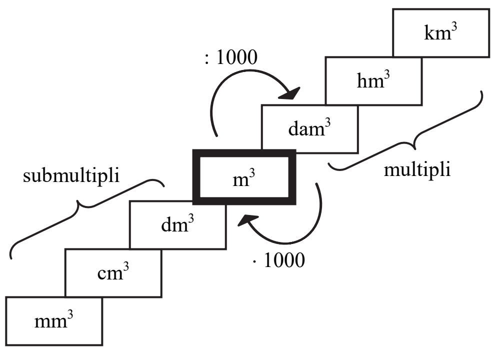




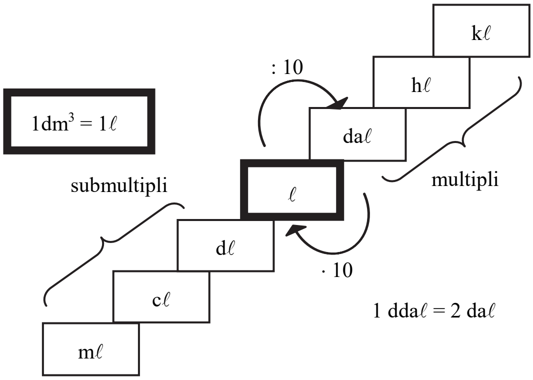
Unitatea de măsură standard pentru arie este metrul pătrat (m^2).

1 ar = 1 dam^2

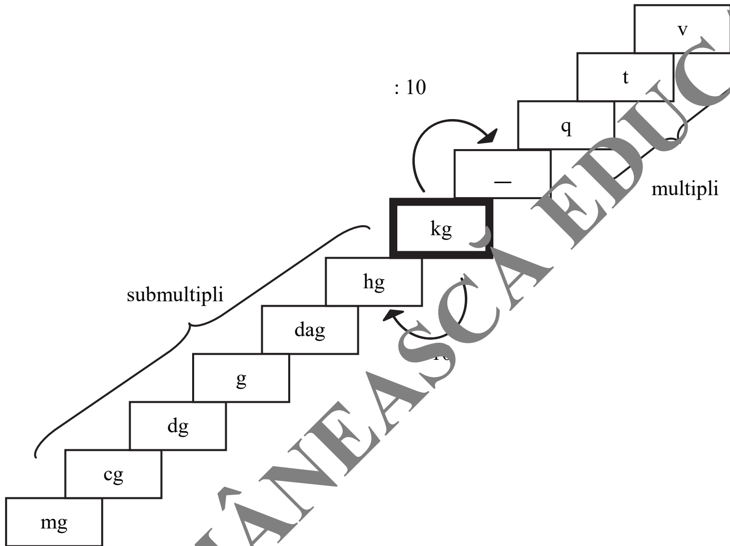
1 ha = 1 hm^2



Unitatea de măsură standard pentru volum este metrul cub (m^3); pentru capacitate este litrul (ℓ).



Unitatea de măsură standard pentru masă este kilogramul (kg).



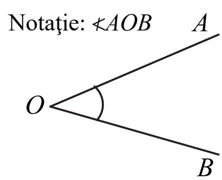
Unitatea de măsură standard pentru timp este secunda.

- minutul: 1 min = 60 s;
- ora: 1 h = 3600 s;
- ziua: 1 d = 24 h.

1.2. Unghiul

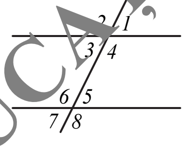
Unghiul este figura geometrică formată de două semidrepte cu originea comună.
Tipuri de unghiuri:

- Unghi nul – este unghiul format din două semidrepte identice şi are măsura de 0°.
- Unghi alungit – este unghiul format din două semidrepte opuse şi are măsura de 180°.
- Unghi propriu – este un unghi, care nu este nici nul, nici alungit.



Clasificarea unghiurilor proprii:

- Unghi ascuţit – are măsura mai mică de 90°.
- Unghi drept – are măsura egală cu 90°.
- Unghi obtuz – are măsura mai mare de 90°.
- Două unghiuri se numesc congruente dacă au aceeaşi măsură.
- Două unghiuri a căror suma a măsurilor este de 90° se numesc unghiuri complementare. Fiecare dintre cele două unghiuri este un complement al celuilalt unghi.
- Două unghiuri a căror sumă a măsurilor este de 180° se numesc unghiuri suplementare. Fiecare dintre cele două unghiuri reprezintă un suplement al celuilalt unghi.
- Două unghiuri care au o latură comună şi interioarele disjuncte se numesc unghiuri adiacente.
- Unghiurile care au acelaşi vârf şi laturile unuia sunt în prelungirile laturilor celuilalt se numesc unghiuri opuse la vârf. Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.



Teoremă: Două drepte paralele, intersectate de o secantă (vezi figura de mai sus), formează perechi de unghiuri:

– alterne interne congruente: $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 5$; $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 6$;

– alterne externe congruente: $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7$; $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$;

– corespondente congruente: $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 5$; $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 6$; $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 8$; $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 7$;

– interne de aceeaşi parte a secantei suplementare:
$m(\sphericalangle 4) + m(\sphericalangle 5) = m(\sphericalangle 3) + m(\sphericalangle 6) = 180°$;

– externe de aceeaşi parte a secantei suplementare:
$m(\sphericalangle 1) + m(\sphericalangle 8) = m(\sphericalangle 2) + m(\sphericalangle 7) = 180°$.

Teoremă reciprocă: Dacă două drepte tăiate de o secantă formează două unghiuri alterne interne congruente sau alterne externe congruente sau corespondente congruente sau interne de aceeaşi parte a secantei suplementare sau externe de aceeaşi parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.

1.3. Triunghiul

Figura geometrică obţinută prin reuniunea a trei segmente [*AB*], [*BC*] şi [*CA*], *A*, *B*, *C* puncte necoliniare, se numeşte triunghi.

Perimetrul unui triunghi reprezintă suma lungimilor laturilor.

Deci, pentru triunghiul *ABC*, perimetrul este $\mathscr{P} = AB + AC + BC$.

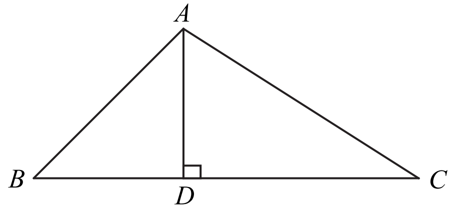


Figura 1

Aria unui triunghi este egală cu jumătate din produsul dintre o latură şi înălţimea corespunzătoare (Figura 1).

$$\mathscr{A}_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$$

O altă formulă pentru calculul ariei unui triunghi este formula lui Heron. Aceasta este utilă atunci când cunoaştem lungimile laturilor triunghiului.

$\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde p este semiperimetrul, iar a este latura BC, b este latura AC şi c este latura AB:

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Altă formulă pentru calculul ariei unui triunghi, în care intervin şi funcţiile trigonometrice, este următoarea:

$$\mathscr{A} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\sphericalangle BAC)}{2}.$$

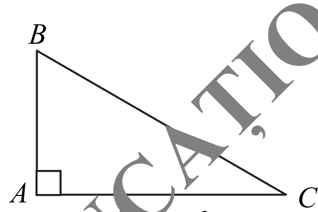


Figura 2

Aria unui triunghi dreptunghic (triunghiul cu un unghi drept) (Figura 2) este semiprodusul catetelor:

$$\mathscr{A} = \frac{AB \cdot AC}{2}.$$

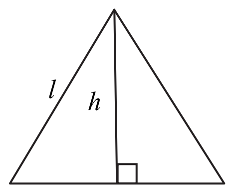


Figura 3

Aria triunghiului echilateral (Figura 3) în funcţie de latură se calculează astfel: $\mathscr{A} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

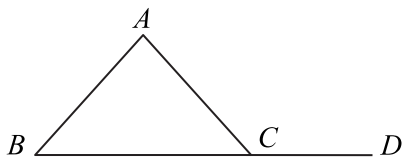
Înălţimea triunghiului echilateral în funcţie de latură are următoarea formulă: $h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$.

În orice triunghi, produsul dintre lungimea înălţimii şi lungimea laturii corespunzătoare ei este constant:

$$b_1 \cdot h_1 = b_2 \cdot h_2 = b_3 \cdot h_3.$$

În orice triunghi, suma măsurilor unghiurilor este de 180°.

Teorema unghiului exterior. Un unghi exterior triunghiului ABC este unghiul ACD. Măsura unui unghi exterior este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare nealăturate: m($\sphericalangle ACD$) = m($\sphericalangle ABC$) + m($\sphericalangle BAC$).



Liniii importante în triunghi şi concurenţa lor:

1. **Bisectoarea** unui unghi interior este segmentul de dreaptă care împarte unghiul în două unghiuri congruente.
2. **Mediana** este segmentul de dreaptă determinat de un vârf al triunghiului şi mijlocul laturii opuse.
3. **Mediatoarea** este dreapta perpendiculară pe o latură dusă prin mijlocul ei.

TESTE

TESTUL 1
(CUM SĂ IEI ZECE LA EVALUAREA NAŢIONALĂ)

SUBIECTUL I: ***Pe foaia de examen, scrieţi numai rezultatele.***

1. **C**alculul 14 – 16 : 4 are rezultatul …
2. **U**nicul număr natural din intervalul (– 4; 1) este …
3. **M**odulul soluţiei ecuaţiei $3 - 2x = 7$ este …
4. **S**e consideră un triunghi ABC dreptunghic, cu m($\sphericalangle A$) = 90°. Dacă AB = 8 cm şi BC = 17 cm, atunci AC = … cm.
5. **A**nalizând Figura 1, observaţi un cub $ABCDEFGH$. Dacă aria unei feţe este 25 cm^2, atunci suma tuturor muchiilor cubului este … cm.

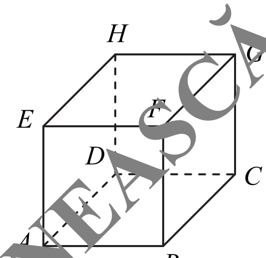


Figura 1

6. **I**ntenţia elevilor unei clase a VIII-a de a urma unul dintre profilurile de care dispune un liceu teoretic este prezentată sub formă de procent în tabelul următor. Conform tabelului, valoarea numărului x este …

Profilul	Filologie	Stiinţe ale naturii	Matematică-informatică	Ştiinţe sociale
Procentul	20%	32%	x%	8%

SUBIECTUL al II-lea: ***Pe foaia de examen, scrieţi rezolvările complete.***

1. **E**laboraţi, pe foaia de examen, un desen care să ilustreze o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V şi baza triunghiul echilateral MNP.
2. **I**dentificaţi prin calcul elementele mulţimii $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x+1}{3} \right| \leq 3 \right\}$.

3. **Z**aharia şi-a cumpărat de patru ori mai multe caiete dictando decât de matematică. Dacă şi-ar mai cumpăra un caiet de matematică, atunci numărul caietelor dictando ar fi de trei ori mai mare decât al celor de matematică. Determinaţi câte caiete de matematică şi-a cumpărat Zaharia.
4. **E**xprimăm numerele a şi b reale sub forma:

   $a = \left(2+\sqrt{3}\right)^2\left(7-4\sqrt{3}\right)+9$, respectiv $b = 7 + 2\sqrt{2}$.

   a) **C**alculaţi numărul a.
   b) **E**ste adevărată relaţia $a > b$?
5. **C**alculaţi $3x + 5y + 5z$, dacă $x + 2y + z = 12$ şi $x + y + 3z = 16$.

SUBIECTUL al III-lea: ***Pe foaia de examen, scrieţi rezolvările complete.***

1. **U**n cort în formă de piramidă patrulateră regulată $VABCD$ este reprezentat schematic în Figura 2. Se ştie că $AC = 2\sqrt{2}$ m şi m($\sphericalangle VAB$) = 60°.
   a) **R**ogojina aşezată pe baza cortului are forma pătratului $ABCD$. Calculaţi latura rogojinii.
   b) **A**rătaţi că triunghiul VAC este dreptunghic.
   c) **T**rasăm MO, unde M este mijlocul muchiei VA, iar O, centrul bazei. Determinaţi aria triunghiului MOA.

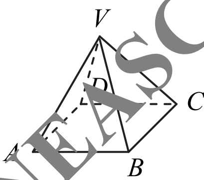


Figura 2

2. **L**ungimea dreptunghiului $ABCD$ din Figura 3, este AB = 12 cm, iar lăţimea sa de două ori mai mică decât lungimea.
   a) **A**flaţi aria dreptunghiului $ABCD$.
   b) **E**xprimaţi perimetrul patrulaterului $DMBN$ în metri, unde M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv CD.
   c) **N**otând E intersecţia segmentelor AC şi DM, iar cu F intersecţia segmentelor AC şi BN, arătaţi că $AE = EF = FC$.

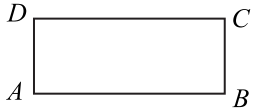


Figura 3

TESTUL 2

SUBIECTUL I: ***Pe foaia de examen, scrieţi numai rezultatele.***

1. Rezultatul calculului $3 \cdot 12 - 3 \cdot 11$ este …
2. Media aritmetică a numerelor 12 şi 24 este …
3. Soluţia inecuaţiei $x + 2 < 7$ este reprezentată de intervalul …
4. Un romb cu diagonalele de 10 cm şi 24 cm are latura de … cm.
5. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ din Figura 1. Dacă $AB =$ $= 5$ cm şi $AA' = 10$ cm, atunci suma tuturor muchiilor este … cm.

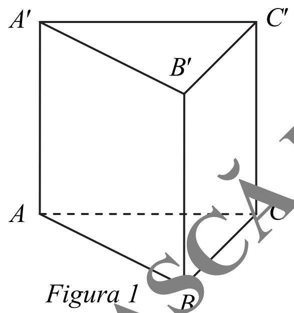


Figura 1

6. În tabelul următor, este prezentat intervalul de timp în care un elev este la şcoală. Conform tabelului, luni, elevul stă la şcoală … ore.

Ziua	Luni	Marţi	Miercuri	Joi	Vineri
Nr. ore	5	6	6	6	6

SUBIECTUL al II-lea: ***Pe foaia de examen, scrieţi rezolvările complete.***

1. Desenaţi, pe foaia de examen, un tetraedru regulat şi notaţi-l *UŞOR*.
2. Într-un vagon de tren, numărul locurilor ocupate este egal cu numărul locurilor libere (nu există persoane care stau în picioare). Dacă în vagon se urca 11 persoane, aceştea aşezându-se pe scaune, numărul locurilor ocupate devine de trei ori mai mare decât numărul locurilor libere. Câte locuri are în total vagonul?
3. Un număr natural n împărţit la 51 dă restul 34. Arătaţi că numărul n se divide cu 17.
4. Fie mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x-1}{3} \right| \le 3 \right\}$.

a) Determinaţi mulţimea A.
b) Determinaţi $A \cap \mathbb{Z}_+^*$.

5. Arătaţi că numărul $p = \dfrac{4}{\sqrt{3}-1} - \left|3 - 2\sqrt{3}\right|$ este întreg.

SUBIECTUL al III-lea: ***Pe foaia de examen, scrieţi rezolvările complete.***

1. În Figura 2, este reprezentat un trunchi de con cu secțiunea axială trapezul isoscel $ABCD$, cu $m(\sphericalangle ABC) = 60°$, $AB = 16$ cm și $CD = 8$ cm.

a) Calculați aria laterală a trunchiului.

b) Calculați volumul trunchiului.

c) Calculați lungimea celui mai scurt drum dintre punctele A și B, parcurs pe suprafața laterală a trunchiului.

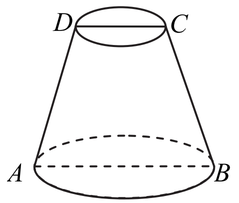


Figura 2

2. În Figura 3, este reprezentat schematic un spaţiu verde în formă de dreptunghi $ABCD$, cu lungimea 12 m şi lăţimea 6 m, în care s-au amenajat două suprafeţe cu flori în formă de semicercuri cu diametrele AD, respectiv BC, M şi N fiind mijloacele arcelor AD şi BC.

a) Aflaţi aria suprafeţei spaţiului verde.

b) Arătaţi că suprafaţa plantată cu flori este mai mică de 28,4 m^2 ($3,14 < \pi < 3,15$).

c) Un iepuraş porneşte din punctul A, parcurge arcul AM, apoi merge în linie dreaptă până în punctul N şi îşi continuă drumul pe arcul NC până în C. Aflaţi lungimea drumului parcurs de iepuraş.

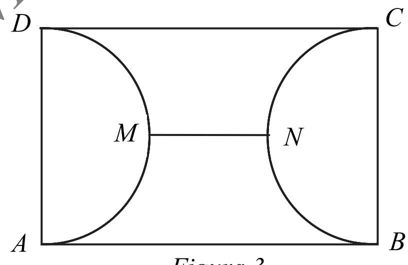


Figura 3

SOLUŢII

Testul 1

Subiectul I: 1. 10. **2.** 0. **3.** −2. **4.** 15 cm. **5.** 50 cm. **6.** 40.

Subiectul al II-lea: 2. $\left|\frac{2x+1}{3}\right| \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3} \in [-3; 3] \Leftrightarrow 2x + 1 \in [-9; 9] \Leftrightarrow 2x \in$ $\in [-10; 8] \Leftrightarrow x \in [-5; 4] \Leftrightarrow A = [-5; 4]$. **3.** $m = 3$ caiete de matematică. **4. a)** $a =$ $= (2+\sqrt{3})^2(7-4\sqrt{3}) + 9 \Rightarrow a = (4 + 4\sqrt{3} + 3)(7 - 4\sqrt{3}) + 9 \Rightarrow a = (7+4\sqrt{3}) \cdot$ $\cdot (7-4\sqrt{3})+9 \Rightarrow a = 7^2 - (4\sqrt{3})^2 + 9 \Rightarrow a = 49 - 48 + 9 = 10$. **b)** $10 > 7 + 2\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{9} > \sqrt{8}$, deci relația este adevărată. **5.** $3x + 5y + 5z = 40$.

Subiectul al III-lea: 1. a) $AC = 2\sqrt{2} = l\sqrt{2} \Rightarrow l = 2$ m; **b)** $VA = VC = 2$ m; $AC =$ $= 2\sqrt{2}$ m $\Rightarrow \Delta VAC$ – dreptunghic; **c)** $\mathscr{A}_{\Delta MOA} = 0{,}5$ m^2. **2. a)** $L = 12$ cm; $l = 12 : 2 =$ $= 6$ cm; $\mathscr{A}_{ABCD} = L \cdot l = 12 \cdot 6 = 72$ cm^2. **b)** $\mathscr{P}_{DMBN} = 12(1 + \sqrt{2})$ cm. **c)** ME – linie mijlocie $\Rightarrow AE = EF$. Analog, $FC = EF \Rightarrow AE = EF = FC$.

Testul 2

Subiectul I: 1. 3. **2.** 18. **3.** $(-\infty; 5)$. **4.** 13. **5.** 60. **6.** 5.

Subiectul al II-lea: 2. x – numărul locurilor ocupate; y – numărul locurilor libere $\Rightarrow$ $\Rightarrow x = y$ şi $x + 11 = 3(y - 11) \Rightarrow x = y = 22 \Rightarrow 44$ de locuri. **3.** $n = 17(3c + 2) \Rightarrow$ $\Rightarrow n$ | se divide cu 17. **4. a)** $A = [-4; 5]$; **b)** $A \cap \mathbb{Z}_+^* = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. **5.** $p = 5 \in \mathbb{Z}$.

Subiectul al III-lea: 1. a) $R = 8$ cm, $r = 4$ cm, $\cos 60° = \frac{R-r}{G} \Rightarrow G = 8$ cm, $\text{tg } 60° = \frac{H}{R-r} \Rightarrow H = 8\sqrt{3}$ cm. $\mathscr{A}_l = \pi G(R + r) = 96\pi$ cm^2; **b)** $\mathscr{V} = \frac{\pi H}{3}(R^2 +$ $+ r^2 + Rr) = \frac{448\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3; **c)** Fie $\mathscr{V}$ vârful conului din care provine trunchiul. Din asemănarea conului mic cu cel mare, obţinem că $\frac{VC}{VB} = \frac{r}{R} \Rightarrow VB = 16$ cm. Notăm $G_1 = VB$ generatoarea conului din care provine trunchiul. $\alpha = \frac{360^\circ \cdot R}{G_1} = \frac{360^\circ \cdot 8}{16} =$ $= 180°$. Drumul minim este reprezentat de segmentul AB de pe desfăşurare. $AB =$ $= 16\sqrt{2}$ cm; **2. a)** 72 m^2; **b)** $\mathscr{A}_{flori} = 9\pi$ m^2 $\Rightarrow 28{,}26 < \pi < 28{,}35 \Rightarrow \mathscr{A}_{flori} < 28{,}4$ m^2; **c)** $d_{iepure} = 3\pi + 6$ m.

CUPRINS

Programa pentru Evaluarea Naţională la matematică clasa a VIII-a 5

ARITMETICĂ ŞI ALGEBRĂ 9

GEOMETRIE 47

TESTE 69

SOLUŢII 189