Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

7

Ediţia a VI-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
TUDOR, ION
Matematică : algebră, geometrie : modalităţi de lucru diferenţiate - pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : 7 / Ion Tudor. - Ed. a 6-a. - Piteşti : Paralela 45, 2022
2 vol.
ISBN 978-973-47-3652-2
Partea 2. - 2022. - ISBN 978-973-47-3768-0

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Piteşti, jud. Argeş, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

ALGEBRĂ

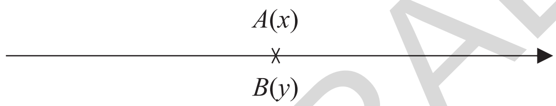
Capitolul II

ECUAȚII ŞI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Citesc şi rețin

Numerele reale x şi y sunt egale, dacă punctele de pe axa numerelor care au coordonatele x, respectiv y sunt identice ($A(x) = B(y)$).



Pe mulţimea numerelor reale, relaţia de egalitate are următoarele proprietăţi:

1. Reflexivitate: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Simetrie: dacă $x = y$, atunci şi $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Tranzitivitate: dacă $x = y$ şi $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

În $\mathbb{R}$, o egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă, dacă:

– se adună sau se scade din ambii membri ai egalităţii acelaşi termen:

$$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z;\ x = y \Leftrightarrow x - z = y - z;$$

– se înmulţesc sau se împart ambii membri ai egalităţii cu acelaşi factor nenul:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z;\ x = y \Leftrightarrow x : z = y : z.$$

De asemenea, dacă se adună, se scad, se înmulţesc sau se împart membru cu membru două egalităţi, se obţine tot o egalitate.

Dacă $x = y$ şi $z = t$, atunci $x + z = y + t$, $x - z = y - t$, $x \cdot z = y \cdot t$ şi $x : z = y : t$ ($z \neq 0$, $t \neq 0$).

Definiţie: O egalitate care conţine una sau mai multe variabile şi care este adevărată pentru orice valori atribuite acestora se numeşte **identitate**.

Cum se aplică?

1. Ştiind că $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, arătaţi că $x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31$.

Soluţie:

$x = y \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = y \cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31.$

2. Se consideră numerele reale a, b, c şi d, care îndeplinesc condiţiile $4a = 3b$ şi $25c = 10d$. Arătaţi că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Soluţie:

$4a = 3b \Leftrightarrow 3 \cdot 4a = 3 \cdot 3b \Leftrightarrow 12a = 9b$; $25c = 10d \Leftrightarrow 25c : 5 = 10d : 5 \Leftrightarrow 5c = 2d$.
Din $12a = 9b$ şi $5c = 2d$ rezultă că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x + 3 = y + 3$; ☐ b) $x - 8 = y - 8$; ☐
c) $x - 1,(3) = y - 1,(3)$; ☐ d) $x + \sqrt{2} = \sqrt{2} + y$. ☐

2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x \cdot 27 = y \cdot 27$; ☐ b) $x : \sqrt{5} = y : \sqrt{5}$; ☐
c) $x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot y$; ☐ d) $x : (-23) = y : (-23)$. ☐

3. Dacă x şi y sunt două numere reale care îndeplinesc condiţia $24x = 36y$, arătaţi că:

a) $6x = 9y$; b) $4x = 6y$; c) $2x = 3y$.

c)

4. Dacă x şi y sunt două numere reale, astfel încât $x = y$, arătaţi că:

a) $x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) $x \cdot \sqrt{2} - 41 = y \cdot \sqrt{2} - 41$.

b)

5. Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $2z = 5t$. Arătaţi că:

a) $20z = 50t$; b) $\frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$.

b)

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $6x = 2\sqrt{3}y$. Arătaţi că:

a) $2\sqrt{3}x = 2y$; b) $\sqrt{3}x = y$; c) $\sqrt{6}x = \sqrt{2}y$.

7. Dacă a, b, c şi d sunt numere reale care îndeplinesc condiţiile $10a = 15b$ şi $35c = 28d$, arătaţi că $2a + 5c = 3b + 4d$.

8. Se consideră numerele $a, b \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $\sqrt{3}a^3 = \sqrt{6}b$ şi $2\sqrt{3}a = \sqrt{6}b^3$. Arătaţi că $|a| = |b|$.

9. Verificaţi identităţile:

a) $xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$; b) $xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$.

10. Verificaţi identităţile:

a) $\frac{1}{2}xy + x + y + 2 = \frac{1}{2}(x + 2)(y + 2)$; b) $\frac{1}{3}xy - x - y + 3 = \frac{1}{3}(x - 3)(y - 3)$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

11. Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, care îndeplinesc condiţiile $a + b + c = 1$ şi $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0$. Arătaţi că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

12. Se consideră numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $x \cdot y \cdot z = 1$ şi $\frac{x^2 + yz}{1 + x^3} + \frac{y^2 + zx}{1 + y^3} + \frac{z^2 + xy}{1 + z^3} = 0$. Arătaţi că: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$. Arătaţi că:

a) $x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $\frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$.

(3p) **2.** Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y$. Arătaţi că $\sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$.

(3p) **3.** Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $4a = 5b$ şi $14c = 10d$. Arătaţi că $12a + 7c = 15b + 5d$.

Lecția 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

Citesc şi reţin

O ecuaţie de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ şi $x \in \mathbb{R}$ (1), se numeşte **ecuaţie de gradul I cu o necunoscută**.

Definiţie: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numeşte **soluţie a ecuaţiei** (1), dacă
$au + b = 0$ (u verifică ecuaţia).

A rezolva ecuaţia (1) înseamnă a determina **mulţimea de soluţii**
$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au + b = 0\}.$$

Definiţie: Două ecuaţii de gradul I cu o necunoscută se numesc **echivalente**, dacă au aceeaşi mulţime de soluţii.

Pentru a rezolva ecuaţia (1) putem folosi proprietăţile relaţiei de egalitate pe $\mathbb{R}$.

Cum se aplică?

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ următoarele ecuaţii:

a) $-20x = -35$; b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6}$.

Soluţie:

a) $-20x = -35 \Leftrightarrow x = \frac{-35}{-20} \Leftrightarrow x = +\frac{35^{(5}}{20} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = 1\frac{3}{4}$;

b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \frac{-6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $1,5 + 0,(6)x = 2$; b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Soluţie:

a) $1,5 + 0,(6)x = 2 \Leftrightarrow 0,(6)x = 2 - 1,5 \Leftrightarrow 0,(6)x = 0,5 \Leftrightarrow \frac{6^{(3}}{9}x = \frac{5^{(5}}{10} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$;

b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = (8\sqrt{6}) : (2\sqrt{2}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $\frac{3x}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2(7x+5)}{15}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie:

$\frac{^{6)}3x}{5} - \frac{^{15)}1}{2} = \frac{^{2)}2(7x+5)}{15} \Leftrightarrow 18x - 15 = 4(7x + 5) \Leftrightarrow 18x - 15 = 28x + 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 18x - 28x = 20 + 15 \Leftrightarrow -10x = 35 \Leftrightarrow x = \frac{35^{(5}}{-10} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 5x-y=7 \\ x+2y=8 \end{cases}$.

(3p) **2.** Rezolvaţi prin metoda reducerii sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{y}{\sqrt{3}}=-1 \\ \sqrt{3}x-\sqrt{2}y=5\sqrt{6} \end{cases}$.

(3p) **3.** Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \dfrac{9(1-x)}{4}+\dfrac{y}{6}=5 \\ \dfrac{3x}{2}-\dfrac{y+1}{8}=-2 \end{cases}$.

Lecţia 5. Probleme care se rezolvă cu ajutorul sistemelor de două ecuaţii liniare cu două necunoscute

Citesc şi reţin

Rezolvarea unei probleme cu ajutorul sistemului de ecuaţii cuprinde următoarele etape:
– notarea necunoscutelor;
– punerea problemei în sistem de ecuaţii (modelul matematic);
– rezolvarea sistemului de ecuaţii;
– analiza şi interpretarea rezultatului.

Cum se aplică?

1. Suma a două numere este egală cu 80, iar diferenţa lor este egală cu 46. Aflaţi cele două numere.

Soluţie:

x – numărul mai mare
y – numărul mai mic

$$\begin{cases} x+y=80 \\ \underline{x-y=46} \\ 2x\ \ /=126 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=126 \\ x+y=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{126}{2} \\ x+y=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=63 \\ 63+y=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=63 \\ y=17 \end{cases}.$$

2. Ana şi Ioana sunt surori. Aflaţi vârstele lor, ştiind că împărţind vârsta Anei la vârsta Ioanei obţinem câtul 3 şi restul 1, iar peste 3 ani vârsta Anei va fi egală cu dublul vârstei Ioanei.

Soluţie:

x – vârsta Anei

y – vârsta Ioanei

$$\begin{cases} x = 3y+1 \\ x+3 = 2(y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y+1 \\ 3y+1+3 = 2y+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y+1 \\ 3y-2y = 6-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y+1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\cdot 2+1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$$, deci Ana are 7 ani şi Ioana are 2 ani.

3. Dacă mărim numărătorul unei fracţii cu 4 se obţine o fracţie echivalentă cu fracţia $\frac{3}{2}$, iar dacă micşorăm numărătorul cu 3, se obţine o fracţie echivalentă cu fracţia $\frac{1}{3}$. Aflaţi fracţia respectivă.

Soluţie:

a – numărătorul fracţiei

b – numitorul fracţiei

$$\begin{cases} \dfrac{a+4}{b} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{a-3}{b} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+4) = 3b \\ 3(a-3) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+8 = 3b \\ 3a-9 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b = -8 \\ b = 3a-9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3(3a-9) = -8 \\ b = 3a-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-9a+27 = -8 \\ b = 3a-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7a = -35 \\ b = 3a-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-35}{-7} \\ b = 3a-9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases}$$, deci fracţia este $\frac{5}{6}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Suma a două numere este egală cu 64. Aflaţi cele două numere, dacă unul dintre ele este cu 4 mai mare decât celălalt.

2. Suma a două numere este egală cu 77. Aflaţi cele două numere, dacă unul dintre ele este cu 7 mai mic decât celălalt.

3. Suma a două numere este egală cu 52. Aflaţi cele două numere, dacă unul dintre ele este de trei ori mai mare decât celălalt.

4. Diferenţa a două numere este egală cu 85. Aflaţi cele două numere, dacă unul dintre ele este de şase ori mai mic decât celălalt.

5. Suma a două numere este egală cu 39, iar diferenţa lor este egală cu 15. Aflaţi cele două numere.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Diferenţa a două numere este egală cu 13. Aflaţi cele două numere, dacă unul dintre ele este cu 3 mai mare decât dublul celuilalt.

7. Suma a două numere este egală cu 38. Aflaţi cele două numere, dacă unul dintre ele este cu 6 mai mic decât triplul celuilalt.

8. Suma a două numere este egală cu 27, iar diferenţa dintre dublul primului număr şi triplul celui de-al doilea număr este egală cu 4. Aflaţi numerele.

9. Diferenţa a două numere este egală cu 36, iar prin împărţirea lor se obţin câtul 5 şi restul 0. Aflaţi cele două numere.

10. Suma a două numere este egală cu 14, iar diferenţa pătratelor lor este egală cu 56. Aflaţi cele două numere.

11. Suma a două numere este egală cu 134. Aflaţi cele două numere, ştiind că prin împărţirea lor se obţin câtul 3 şi restul 10.

12. Diferenţa a două numere este egală cu 49. Aflaţi cele două numere, ştiind că cel mai mic dintre ele este cu 1 mai mare decât $\frac{3}{5}$ din celălalt.

13. Suma a două numere este egală cu 80. Aflaţi cele două numere, ştiind că cel mai mare dintre ele este cu 17 mai mare decât $\frac{4}{5}$ din celălalt.

14. Suma a două numere este egală cu 231. Aflaţi cele două numere, dacă unul dintre ele reprezintă 75% din celălalt.

15. Într-o clasă sunt 25 de elevi. Calculaţi numărul băieţilor din clasă, ştiind că acesta reprezintă $\frac{2}{3}$ din numărul fetelor.

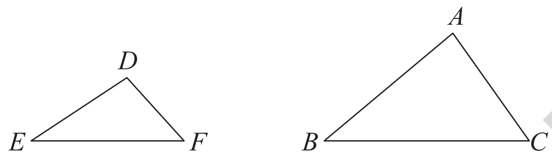
Lecţia 4. Triunghiuri asemenea

Citesc şi reţin

Definiţie: Triunghiurile *DEF* şi *ABC* se numesc **triunghiuri asemenea** dacă:

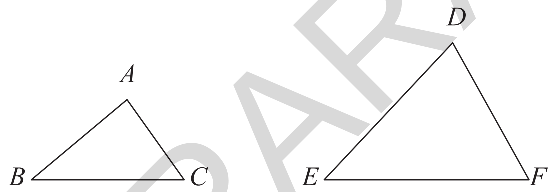
$$\sphericalangle D \equiv \sphericalangle A,\ \sphericalangle E \equiv \sphericalangle B,\ \sphericalangle F \equiv \sphericalangle C \text{ şi } \frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}.$$

Notăm $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ şi citim: triunghiul *DEF* este asemenea cu triunghiul *ABC*.



Definiţie: Dacă $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, atunci oricare dintre rapoartele $\frac{DE}{AB}, \frac{EF}{BC}, \frac{FD}{CA}$ se numeşte **raportul de asemănare** a celor două triunghiuri.

Teoremă: Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \sim \Delta DEF \\ \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{CA}{FD}=k\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathscr{A}_{ABC}}{\mathscr{A}_{DEF}}=k^2$$

Cum se aplică?

1. Ştiind că $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, $\sphericalangle D = 43°$ şi $\sphericalangle E = 62°$, determinaţi $\sphericalangle C$.

Soluţie:

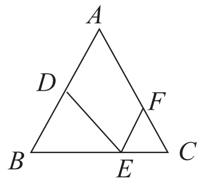
Deoarece $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, rezultă că $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$ şi $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle C$. În triunghiul *DEF* avem: $\sphericalangle D + \sphericalangle E + \sphericalangle F = 180°$, deci $43° + 62° + \sphericalangle F = 180°$, de unde rezultă că $\sphericalangle F = 75°$, prin urmare $\sphericalangle C = 75°$.

2. Se consideră $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{2}{3}$. Ştiind că $DE = 14$ cm, $EF = 18$ cm şi $FD = 22$ cm, calculaţi *AB*, *BC* şi *CA*.

Soluţie:

Deoarece $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, rezultă că $\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}=\frac{2}{3}$; $\frac{DE}{AB}=\frac{2}{3}$, deci $\frac{14\text{ cm}}{AB}=\frac{2}{3}$, de unde rezultă că $AB = 21$ cm. Analog se arată că $BC = 27$ cm şi $CA = 33$ cm.

3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele D, E şi F situate pe laturile AB, BC, respectiv CA. Dacă $\Delta DBE \sim \Delta ECF$, determinaţi măsura unghiului DEF.



Soluţie:

$\Delta DBE \sim \Delta ECF$, deci $\sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle CEF$ şi, deoarece $\sphericalangle BDE + \sphericalangle BED = 120°$, rezultă că $\sphericalangle CEF + \sphericalangle BED = 120°$, prin urmare $\sphericalangle DEF = 180° - 120°$ şi obţinem $\sphericalangle DEF = 60°$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă $\Delta MNP \sim \Delta DEF$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle D$; ☐ b) $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle F$; ☐ c) $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle E$; ☐ d) $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle F$. ☐

2. Ştiind că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{CA}{PM}$; ☐ b) $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{CA}{PM}$; ☐ c) $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{PM}{CA}$. ☐

3. Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Ştiind că:

a) $\sphericalangle A = 39°$ şi $\sphericalangle B = 73°$, aflaţi măsura unghiului F;

b) $\sphericalangle D = 27°$ şi $\sphericalangle F = 62°$, aflaţi măsura unghiului B.

b)

4. Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Ştiind că:

a) $\sphericalangle A = 35°$ şi $\sphericalangle E = 75°$, aflaţi măsura unghiului F;

b) $\sphericalangle B = 40°$ şi $\sphericalangle F = 53°$, aflaţi măsura unghiului A.

b)

5. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei: Dacă $\Delta MNP \sim \Delta QRT$, raportul lor de asemănare fiind egal cu 1, atunci $\Delta MNP \equiv \Delta QRT$. ☐

6. Se consideră $\Delta DEF \sim \Delta MNP$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{2}{3}$. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Raportul $\frac{\mathcal{A}_{DEF}}{\mathcal{A}_{MNP}}$ este egal cu:

A. $\frac{2}{3}$; B. $\frac{4}{6}$; C. $\frac{6}{9}$; D. $\frac{4}{9}$.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

7. Se consideră $\Delta MNP \sim \Delta ABC$. Ştiind că:

a) $\frac{\mathcal{A}_{MNP}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{25}{36}$, aflaţi $\frac{MN}{AB}$; b) $\frac{\mathcal{A}_{MNP}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{16}{49}$, aflaţi $\frac{NP}{BC}$.

8. Se consideră $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{2}{5}$.

a) Dacă $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm şi $CA = 20$ cm, aflaţi DE, EF şi FD.
b) Dacă $DE = 10$ cm, $EF = 14$ cm şi $FD = 22$ cm, aflaţi AB, BC şi CA.

9. Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{4}{5}$. Ştiind că:

a) $\mathcal{A}_{ABC} = 64$ cm^2, calculaţi $\mathcal{A}_{DEF}$; b) $\mathcal{A}_{DEF} = 75$ cm^2, calculaţi $\mathcal{A}_{ABC}$.

10. Se consideră $\Delta DEF \sim \Delta MNP$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{5}{7}$. Dacă:

a) $\mathcal{P}_{DEF} = 65$ cm, aflaţi $\mathcal{P}_{MNP}$; b) $\mathcal{P}_{MNP} = 63$ cm, aflaţi $\mathcal{P}_{DEF}$.

11. Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Ştiind că:

a) $AB = 7$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 10$ cm şi $\mathcal{P}_{DEF} = 75$ cm, calculaţi DE, EF şi FD;
b) $DE = 7$ cm, $EF = 9$ cm, $FD = 12$ cm şi $\mathcal{P}_{ABC} = 70$ cm, calculaţi AB, BC şi CA.

12. În triunghiul ABC, notăm cu M, N şi P mijloacele laturilor AB, BC, respectiv CA. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

13. Se consideră triunghiul ABC şi punctele D, E şi F situate pe laturile AB, BC, respectiv CA. Ştiind că $\Delta DBE \sim \Delta FEC$, arătaţi că patrulaterul $ADEF$ este paralelogram.

14. Ştiind că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ şi $\Delta DEF \sim \Delta MNP$, arătaţi că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

15. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ şi punctele E şi F situate pe laturile AB, respectiv BC. Dacă $\Delta DAE \sim \Delta EBF$, determinaţi măsura unghiului DEF.

16. Se consideră dreptunghiul $MNPQ$ şi punctele D şi E situate pe laturile NP, respectiv PQ. Dacă $\Delta MND \sim \Delta NPE$, arătaţi că $MD \perp NE$.

17. În triunghiul ABC, construim înălţimea AD, D este interior laturii BC. Ştiind că $\Delta DAB \sim \Delta DCA$, arătaţi că:

a) $AD^2 = BD \cdot CD$; b) $\sphericalangle BAC = 90°$.

18. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$, bisectoarea unghiului ABC intersectează latura AC în punctul D. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta BDC$, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

19. Se consideră triunghiul obtuzunghic ABC cu $AB \equiv AC$. Perpendiculara construită în A pe dreapta AB intersectează latura BC în punctul D. Ştiind că $\Delta ABC \sim \Delta DCA$, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

20. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, arătaţi că $AB(EF + FD) = DE(BC + CA)$, $BC(FD + DE) = EF(CA + AB)$ şi $CA(DE + EF) = FD(AB + BC)$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului DEF, ştiind că $\Delta DEF \sim \Delta EFD$.

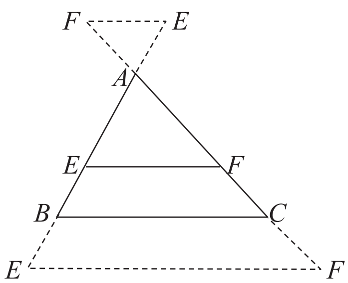
(3p) **2.** Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{3}{5}$. Ştiind că $MN = 15$ cm, $NP = 20$ cm şi $PM = 25$ cm, calculaţi $\mathscr{P}_{ABC}$.

(3p) **3.** Se consideră triunghiul obtuzunghic ABC cu $AB \equiv AC$ şi punctul D situat pe latura BC, astfel încât $CA \equiv CD$. Ştiind că $\Delta ABC \sim \Delta DBA$, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Lecţia 5. Teorema fundamentală a asemănării

Citesc şi reţin

Teorema fundamentală a asemănării: O paralelă construită la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi ale triunghiului (sau cu prelungirile lor) un triunghi asemenea cu triunghiul dat.



$EF \parallel BC \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC$

Cuprins